Übung Nullstellen ganzrationaler Funktionen - Lösung

$$f(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2$$

- **Nullstellen bestimmen**

1. **Erste Nullstellen durch Ausprobieren herausfinden**

$$\begin{aligned} f(1) &= 2 \cdot 1^3 + 5 \cdot 1^2 + 1 - 2 = 2 + 5 + 1 - 2 = 6 \\ f(2) &= 2 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^2 + 2 - 2 = 16 + 20 + 2 - 2 = 36 \\ f(-1) &= 2 \cdot (-1)^3 + 5 \cdot (-1)^2 - 1 - 2 = -2 + 5 - 1 - 2 = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow f(x)$ **hat eine Nullstelle bei $\mathbf{x_1 = -1}$**

2. **Polynomdivision durch den Linearfaktor** $(x - x_1) = (x + 1)$

$$\begin{aligned} & (2x^3 + 5x^2 + x - 2) : (x + 1) = 2x^2 + 3x - 2 \\ - \; & \underline{(2x^3 + 2x^2)} \\ & \quad 3x^2 + x - 2 \\ & \quad \underline{-(3x^2 + 3x)} \\ & \qquad -2x - 2 \\ & \qquad \underline{-(-2x - 2)} \\ & \qquad \qquad 0 \end{aligned}$$

3. **Weitere Nullstellen mit Mitternachtsformel berechnen:**

$$\begin{aligned} 2x^2 + 3x - 2 &= 0 \\ x_{2/3} &= \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} \\ &= \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4} \\ \mathbf{x_2} &= \mathbf{\frac{1}{2}} \qquad \mathbf{x_3 = -2} \end{aligned}$$

Ergebnis: Die Funktion hat insgesamt drei Nullstellen:

$x_1 = -1$ $\qquad$ $x_2 = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $x_3 = -2$